https://doi.org/10.31649/mccs2022.24

УДК 62-503.56: 62-531.7

Я. В. Іванчук[1]
Р. Д. Іскович-Лотоцький[1]
О. Д. Замковий[1]
Р. І. Павлович[1]

МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ ВСТАНОВЛЕНОГО РУХУ КОЛИВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ ПРИ ВИПАДКОВОМУ ЗБУДЖЕНІ

[1]Вінницький національний технічний університет

Запропоновано підхід до моделювання динаміки руху коливальної системи із зовнішнім випадковим збудження, що дозволило визначити оптимальні режими керування встановленого руху системи. У розглянутій коливальній системі, як приклад одного з видів вібраційної машини, випадкове періодичне силове збудження представлено у вигляді «білого шуму» і рух системи описаний стохастичними диференціальними рівняннями. Періодична складова збудження представлена у вигляді розкладання по косинусах. Прийнято, що випадкові і детерміновані збудження мають однаковий вплив на рух системи. Визначено, що у коливальних системах, збуджених білим шумом, значення коефіцієнтів знесення у функціоналі утворюються лише за рахунок усереднення детермінованих складових. Це дозволило записати усереднене рівняння динамічного програмування і побудувати синтез керування. Використаний принцип динамічного програмування визначив синтез керування, і стохастичний принцип максимуму, що дозволив побудувати програмне керування. Визначена функція оптимального керування зовнішнього прикладення моменту сил до підвісу (виконавчого органу) з метою стабілізації коливальної системи при випадковому силовому збудженні системи уцілому. На основі рівняння оптимального керування розглянуті окремі випадки, а саме: параметричне збудження включає тільки першу гармоніку, а параметричний резонанс відсутній; зовнішнє силове збудження не містить першої гармоніки, зовнішній резонанс відсутній; зовнішнє силові випадкові збудження відсутні. Показано, що при любому допустимому керуванню за допомогою моменту, що прикладений до підвісу, процес зводиться до дифузійного і виконується оптимальний пошук на траєкторіях (режимах) граничної дифузійної системи.

Ключові слова: вібраційна система, маятник, коливання, моделювання, оптимальне керування, випадкове збудження, білий шум, момент сил.

Вступ

Якість роботи механізму характеризується вимогами, що пред’являються до руху окремих точок механічної системи [1]. При конструюванні вібраційних машин і систем віброзахисту є ряд вимог, які необхідно забезпечувати [2]. Програмне позиційне керування, що реалізується у багатьох вібротранспортних системах, у тому числі і в роботах-маніпуляторах, повинно забезпечувати переміщення виконавчого елемента в задану точку за фіксований (або мінімальний) час [2]. Під час проектування оптимальних віброзахисних систем прагнуть мінімізувати переміщення або прискорення деяких характерних точок об’єкта: структура об’єкта (пристрою, машини тощо) може бути заданою тільки експериментальними характеристиками (динамічними податливостями на визначених частотах) [3]. Тому задача визначення оптимального керування встановленим рухом виконавчого органу вібраційних технологічних машин, що функціонують в умовах невизначеності є актуальною.

Одним із можливих підходів до вирішення задач оптимального керування є ймовірнісний підхід [4], при якому усі типи невизначеностей трактуються як випадкові величини із фіксованими ймовірнісними або спектральними характеристиками. Оптимальне керування при цьому визначається із умови екстремуму математичного сподівання деякого функціоналу, який залежить від керування і фазової траєкторії.

Перспективним є підхід використання принципу динамічного програмування [5], який визначає синтез керування, і стохастичний принцип максимуму, що дозволяє будувати програмне керування. Метод динамічного програмування вказує спосіб синтезу керування марківськими процесами, тобто синтезу в тій ситуації, коли майбутні стани системи повністю визначаються поточними значеннями фазових змінних.

Метою статті є визначення функції оптимального керування зовнішнього прикладення моменту сил до підвісу (виконавчого органу) з метою стабілізації коливальної системи при випадковому силовому збудженні системи уцілому.

Постановка задачі

Відома принципова схема коливальної системи у вигляді маятникового підвісу, як тип вібраційної машини із періодичним випадковим силовим збудженням.

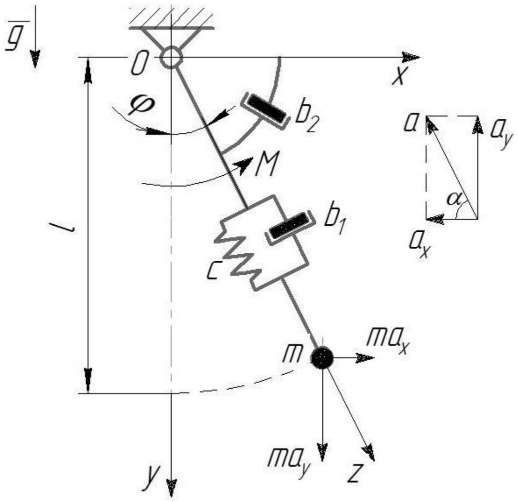

Рис. 1. Розрахункова схема оптимальної стабілізації маятникового підвісу

Для розв'язання задачі розглянемо об'єкт 1 масою *m*, який прикріплений до коливної основи 2 за допомогою лінійно пружного підвісу 3. Коефіцієнт жорсткості підвісу – *c*, коефіцієнт демпфування (дисипації) підвісу – b_1. Зовнішнє прискорення основи *a*(*t*) прикладено під кутом *α* між напрямком вектора прискорення і горизонтальною віссю *x*. Стабілізація системи повинна здійснюватися шляхом прикладення додаткового моменту *M*(*t*), який зменшує відхилення підвісу від вертикалі. Коефіцієнт кутового демпфування (дисипація) підвісу – b_2. Центр мас об'єкта співпадає із центром симетрії, а обертання навколо центра мас відсутнє. У даному випадку система розглядається як математичний маятник на невагомому пружному підвісі (рис. 1):

Рівняння руху маятника:

$$\begin{cases} m\ddot{z} - m(l+z)\dot{\varphi}^2 + 2c(z+\Delta) + 2b_1\dot{z} - mg\cos\varphi = m\left[a_y(t)\cos\varphi + a_x(t)\sin\varphi\right]; \\ m(l+z)\left[(l+z)\ddot{\varphi} + 2\dot{z}\dot{\varphi} + g\sin\varphi\right] + 2b_2\dot{\varphi} = m(l+z)\left[a_x(t)\cos\varphi - a_y(t)\sin\varphi + M(t)\right], \end{cases} \tag{1}$$

де *l* – відстань від центру мас до площини основи в положенні статичної рівноваги, *g* – прискорення сил тяжіння, $\Delta = mg/(2c)$ – статична деформація підвісу, *φ* – кут відхилення маятника від вертикального положення.

Результати дослідження

Припустимо, що прискорення основи *a*(*t*) можна представити як періодичний процес на фоні білого шуму [6]. Подібним чином можна описати випадкові вузькосмугові процеси з яскраво вираженими несучими частотами [7]. Нехай частота першої гармоніки збудження збігається із частотою $\lambda_2 = \left(\frac{g}{l}\right)^{0,5}$ кутових коливань маятника. Вважаючи, що періодична складова збудження може бути представлена у вигляді розкладання по косинусах, тоді:

$$a(t) = a^0(t) + h(t), \quad h(t) = h_0 + 2\sum_{k=1}^{\infty} h_k \cos\left(k\lambda_2 t\right),$$

де $a^0(t)$ – стаціонарний випадковий процес з нульовим середнім та спектральною щільністю S_0=const, також вважається, що відхилення маятника від вертикальної осі *y*, а також деформації підвісу достатньо малі, тобто $|\varphi| \ll 1$, $|\delta| \ll 1$, $\delta = z/l$, $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$, $\lambda_1^2 = 2\frac{c}{m}$, $\lambda_z^2 = \frac{g}{l}$, і в рівняннях руху можна утримувати члени не вище другого ступеня за координатами та швидкостями. Припускаючи невелику кількість збуджуючих і керуючих факторів систему рівнянь (1) можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} \ddot{\delta} + \lambda_1^2\delta + 2\varepsilon^2\beta_1\delta = \varepsilon\left(\xi_1\left(t\right) + \varepsilon\theta_1\left(t\right)\right)\varphi + \varepsilon\left(\xi_2\left(t\right) + \varepsilon\theta_2\left(t\right)\right) + \varepsilon^2\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}\lambda_2^2\varphi^2\right); \\ \ddot{\varphi} + \lambda_2^2\varphi + 2\varepsilon^2\beta_2\dot{\varphi} = \varepsilon(1+\delta)(\xi_1\left(t\right) + \varepsilon\theta_1\left(t\right)) + \varepsilon\left(\xi_2\left(t\right) + \varepsilon\theta_2\left(t\right)\right) - \varepsilon^2\left(2\dot{\delta}\dot{\varphi} + \lambda_2^2\delta_\varphi\right) + \varepsilon^2 u, \end{cases} \tag{2}$$

де ε – малий параметр, $\varepsilon\xi_1 = l^{-1}a^0(t)\cos\alpha$, $\varepsilon\xi_2 = l^{-1}a^0(t)\sin\alpha$, $\varepsilon^2\theta_1 = l^{-1}h(t)\cos\alpha$, $\varepsilon^2\theta_2 = l^{-1}h(t)\sin\alpha$ $\varepsilon^2\theta_2 = l^{-1}h(t)\sin\alpha$, $\varepsilon^2\beta_1 = \dfrac{b_1}{m}$, $\varepsilon^2\beta_2 = \dfrac{b_2}{ml^2}$, $\varepsilon^2 u = \dfrac{2M}{ml^2}$.

Випадкові $\xi_j(t)$ і детерміновані $\Theta_j(t)$ збудження мають однаковий вплив на рух системи; для того щоб це врахувати, вводяться різні ступені малого параметра [8].

Залежність коефіцієнтів рівнянь (2) від часу визначається не тільки випадковими збудженнями, тому розділити усереднені рівняння для амплітуд і фаз коливань не можна. У зв’язку з цим доцільно використати наступну заміну змінних:

$$\delta = x_1^1\cos\lambda_1 t + x_1^2\sin\lambda_1 t + \varepsilon^2\delta_0, \quad \varphi = x_2^1\cos\lambda_2 t + x_2^2\sin\lambda_2 t.$$

Система рівнянь (2) зводиться до наступного виду:

$$\begin{cases} \dot{x}^1 = \varepsilon\Lambda^{-1}F_s(t)\left[\left(\Xi(t) + \varepsilon\,\Theta(t)\right)\left(F_c(t)x^1 + F_s(t)x^2\right) - \xi(t) - \varepsilon\eta(t)\right] + \\ \qquad + 2\varepsilon^2F_s(t)\beta\left(-F_s(t)x^1 + F_c(t)x^2\right) - \varepsilon^2\Lambda^{-1}F_s(t)\left[Gu + Q(t, x^1, x^2)\right]; \\ \dot{x}^2 = \varepsilon\Lambda^{-1}F_c(t)\left[\left(\Xi(t) + \varepsilon\,\Theta(t)\right)\left(F_c(t)x^1 + F_s(t)x^2\right) - \xi(t) - \varepsilon\eta(t)\right] - \\ \qquad - 2\varepsilon^2F_c(t)\beta\left(-F_s(t)x^1 + F_c(t)x^2\right) + \varepsilon^2\Lambda^{-1}F\ \ (t)\left[Gu + Q(t, x^1, x^2)\right]; \\ \delta_0 = \dfrac{\lambda_2^2}{2\lambda_1^2}[(x_2^1)^2 + (x_2^2)^2]. \end{cases} \tag{3}$$

де $\Lambda = diag\left\{\lambda_j\right\}$; $F_s = diag\left\{\sin\lambda_j t\right\}$; $F_c = diag\left\{\cos\lambda_j t\right\}$; j=1, 2, …, n; $\beta = diag\left\{\beta_1, \beta_2\right\}$, вектор G=(0, 1); $\Xi = \begin{vmatrix} 0 & -\xi_1 \\ -\xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix}$ – матриця випадкових збуджень із компонентами; $\Theta = \begin{vmatrix} \Theta_{11} & \Theta_{12} \\ \Theta_{21} & \Theta_{22} \end{vmatrix}$ – матриця періодичних збуджень ($\Theta_{11} = 0$, $\Theta_{12} = \Theta_{21} = S_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} S_k\cos\left(k\lambda_2 t\right)$, $\Theta_{22} = r_0 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} r_k\cos\left(k\lambda_2 t\right)$); $\xi = (\xi_2, -\xi_1)$ – вектор випадкових збуджень; $\eta = (\Theta_{22}, \Theta_{12})$ – вектор періодичних збуджень; Q – вектор, який містить квадратичні члени.

Функціонал задачі у змінних x^1, x^2:

$$\Phi_\varepsilon(u) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T M\left[(x^1, \rho x^1) + (x^2, \rho x^2) + (u)^2\right]dt,$$

де $\rho = diag\{\rho_1, \rho_2\}$, $\rho_j \geq 0$ (j=1, 2).

Якщо перейти від системи виду (3) до граничної дифузійної системи [3, 8], одразу отримаємо, що в системах, збуджених білим шумом, коефіцієнти $b^{ij} = 0$, і коефіцієнти знесення утворюються лише за рахунок усереднення детермінованих складових. Припускаємо, що $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} \neq \dfrac{m}{r}$ (m, r=1, 2, …). У цьому випадку отримані квадратичні зв’язки в першому наближенні не викликають додаткових «зв’язаних коливань» та усереднені рівняння лінійні, тоді за аналогією [9] система (3) перетворюється у наступному вигляді:

$$\begin{cases} dx_{0\varepsilon}^1 = \left[-\beta x_{0\varepsilon}^1 + K^1x_{0\varepsilon}^2 + d^1\tau\varepsilon^{-2}Gu\right]d\tau + s^{11}da^1 + \sigma^{12}da^2; \\ dx_{0\varepsilon}^2 = [K^2x_{0\varepsilon}^1 - \beta x_{0\varepsilon}^2 + K + d^2\tau\varepsilon^{-2}Gu]d\tau + \sigma^{21}da^1 + s^{22}da^2, \end{cases} \tag{4}$$

де $K^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1}(r_0 - r_2) \end{vmatrix}$; $K^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2^{-1}(r_0 + r_2) \end{vmatrix}$; $K = (0, \lambda_2 S_1)$; $d^1(t) = -\Lambda^{-1} F_s(t)$; $d^2(t) = \Lambda^{-1} F_c(t)$.

Із (1) на основі перетворень [10] отримаємо:

$$H(t,x,u,q) = \lambda_2^{-1}(-q^1 \sin \lambda_2 t + q^2 \cos \lambda_2 t)u + u^2 + (x^1, \rho x^1) + (x^2, \rho x^2).$$

де $q^r = \dfrac{\partial V}{\partial x_2^r}$ (r=1, 2).

Якщо із умови мінімуму:

$$u = -(2\lambda_2)^{-1}\left[-q^1 \sin \lambda_2 t + q^2 \cos \lambda_2 t\right]. \tag{5}$$

тоді

$$H^u = (x^1, \rho x^1) + (x^2, \rho x^2) - (4\lambda_2)^{-1}\left(-q^1 \sin \lambda_2 t + q^2 \cos \lambda_2 t\right). \tag{6}$$

Усереднюючи рівняння (6), отримаємо:

$$H^0 = (x^1, \rho x^1) + (x^2, \rho x^2) - D_0\left[\left(q^1\right)^2 + \left(q^2\right)^2\right],$$

де $D_0 = \dfrac{1}{8}\lambda_2^2$.

Усереднене рівняння динамічного програмування набуває вигляду:

$$\sum_{j=1}^{2}\left\{\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{2}\left[A_{jk}^{11}\frac{\partial^2 V^0}{\partial x_j^1 \partial x_k^1} + A_{jk}^{12}\frac{\partial^2 V^0}{\partial x_j^1 \partial x_0^2} + A_{jk}^{21}\frac{\partial^2 V^0}{\partial x_j^2 \partial x_k^1} + A_{jk}^{22}\frac{\partial^2 V^0}{\partial x_j^2 \partial x_k^2}\right] + \frac{1}{2}d_{jj}\left[\frac{\partial^2 V^0}{(\partial x_j^1)^2} + \frac{\partial^2 V^0}{(\partial x_j^2)^2}\right] - \right.$$
$$\left. -\beta_j\left(x_j^1 \frac{\partial V^0}{\partial x_j^1} + x_j^2 \frac{\partial V^0}{\partial x_j^2}\right) + \rho_j\left[(x_j^1) + (x_j^2)^2\right]\right\} - D_0\left[\left(\frac{\partial V^0}{\partial x_2^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^0}{\partial x_2^2}\right)^2\right] + k^1 x_2^2 \frac{\partial V^0}{\partial x_2^1} + \tag{7}$$
$$+k^2 x_2^1 \frac{\partial V^0}{\partial x_2^2} + k\frac{\partial V^0}{\partial x_2^2} = \gamma^0,$$

де $A_{11}^{pq} = 0$, $A_{jk}^{11} = x_j^1 \alpha_{jk} x_k^1 + x_j^2 \delta_{jk} x_k^2$, $A_{jk}^{12} = x_j^1 \alpha_{jk} x_k^2 - x_j^2 \delta_{jk} x_k^1$, $A_{jk}^{21} = -x_j^1 \delta_{jk} x_k^2 + x_j^2 \alpha_{jk} x_k^1$, $\delta_{jk} = \dfrac{1}{8\lambda_1 \lambda_k}\left[S_{jk,kj}^{\xi}\left(\lambda_j + \lambda_k\right) + S_{jk,kj}^{\xi}\left(\lambda_j - \lambda_k\right)\right]$, $d_{jj} = \dfrac{1}{2\lambda_j^2} S^{\xi}(\lambda_j)$.

Розв’язок рівняння (6) реалізується у вигляді:

$$V^0(x^1, x^2) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}[P_j^1 (x_j^1)^2 + P_j^2 (x_j^2)^2] + Q x_2^1 x_2^2 + S^1 x_2^1 + S^2 x_2^2. \tag{8}$$

Використовуючи рівняння (8) для (7) і прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x_j^1, x_j^2 отримаємо:

$$\begin{cases} P_1^1 = P_1^2 = P_1; & (9) \\ q_{21}(P_2^1 + P_2^2) - \beta_1 P_1 + \rho_1 = 0; & (10) \\ 2q_{12}P_1 + (\alpha_{22} + \eta_{22})(P_2^1 + P_2^2) - D_0[(P_2^j)^2 + Q^2] - \beta_2 P_2^j + k^j Q + \rho_2 = 0 \quad (j = 1, 2); & (11) \\ 2Q(\alpha_{22} + \eta_{22}) - 2D_0 Q(P_2^1 + P_2^2) - 2\beta_2 Q + (k^1 + k^2)(P_2^1 + P_2^2) = 0; & \\ -2D_0(P_2^1 S^1 + QS^2) + k^2 S^2 + kQ = 0; & \\ -2D_0(P_2^2 S^2 + QS^1) + k^1 S^1 + kP_2^2 = 0. & \end{cases}$$

де $\alpha_{22} = \dfrac{1}{8\lambda_2^2} S_2$, $\eta_{22} = \dfrac{3}{8\lambda_2^2} S_2$, $q_{12} = q_{21} = \dfrac{1}{4\lambda_1 \lambda_2} S_1$, $d_{11} = \dfrac{1}{2\lambda_1^2} S_2$, $d_{22} = \dfrac{1}{2\lambda_2^2} S_1$, $S_1 = l^{-2} S_0 \cos^2 \alpha$, $S_2 = l^{-2} S_0 \sin^2 \alpha$.

Значення функціоналу визначається співвідношенням [3]:

$$\gamma^0 = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\left(d_{jj}\left[P_j^1 + P_j^2\right] - D_0\left[(S_j^1)^2 + (S_j^2)^2\right]\right) + kS^2 .$$

Підставляючи (8) в (5), отримаємо:

$$u_0 = -\frac{1}{2\lambda_2}\left[-(P_2 x_2^1 + Qx_2^2 + S^1)\sin\lambda t + (P_2^2 x_2^2 + Qx_2^1 + S^2)\cos\lambda t\right]. \tag{12}$$

Рівняння (12) записується у вигляді:

$$u_0 = -\frac{1}{2\lambda_2}\left\{\frac{h}{\lambda_2}\varphi - r\varphi + Q\left[\varphi\cos 2\lambda_2 t - \frac{1}{\lambda_2}\varphi\sin 2\lambda_2 t\right] + S^1\sin\lambda_2 t + S^2\cos\lambda_2 t\right\}, \tag{13}$$

де $h = \frac{1}{2}(P_2^1 + P_2^2)$, $r = \frac{1}{2}(P_2^1 + P_2^2)$.

Розглянемо окремі випадки:

1) $k^1 = k^2 = 0$ (параметричне збудження включає тільки першу гармоніку, параметричний резонанс відсутній).

Так як $Q = 0$, $S^1 = 0$, $P_2^1 = P_2^2 = h$, $r = 0$, $S^2 = \frac{k}{2D_0}$, тоді

$$u_0 = -\frac{1}{2\lambda_2^2}h\varphi - 2S_1\cos\lambda_2 t. \tag{14}$$

Підставляючи (14) в (2) необхідно переконатись, що друга складова в (10) повністю компенсує зовнішнє збудження. Значення коефіцієнта h визначається із розв'язку рівнянь (9)–(11):

$$\begin{cases} P_1 = \beta_1^{-1}(\rho_1 + 2q_{21})h; \\ h^2 - 2D_0^{-1}h[(\alpha_{22} + \eta_{22}) - \beta_2 / 2 + q_{21}\beta_1^{-1}(\rho_1 + 2q_{21})] - (\rho_2 - 2\beta_1^{-1}\rho_1 q_{12}) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Зворотний зв’язок формується тільки по $\dot{\varphi}$, але із-за зв’язності рівнянь коефіцієнт h і значення функціоналу залежать від параметрів усієї системи.

2) k=0 (збудження не містить першої гармоніки, зовнішній резонанс відсутній). Тоді S^1=S^2=0.

3) Випадкові збудження відсутні. У даному випаду буде отримана задача періодичної оптимізації. У рівнянні (3) необхідно ввести $A_{jk}^{p,q} = 0$, $d_{jj} = 0$. Співвідношення (8)–(13) зберігаються, але структура рівнянь (9)–(11) змінюється. Тоді із (11) буде отримано:

$$\begin{cases} Q = (2D_0)^{-1}(k_1 + k_2); \\ P^j = -Q^2 + D_0^{-1}(k^\nu + \rho_2). \end{cases} \tag{16}$$

Підставляючи (4) і рівняння для значення H_0 в (16) отримаємо:

$$(P_2^1, P_2^2)^2 = 8\lambda_2^2(\rho_2 \pm 8r_0 r_2),\ Q = -8\lambda_2^2 r_2 .$$

Очевидно, що задача має розв'язок, якщо $\rho_2 > 8\,|\,r_0 r_2\,|$.

У детермінованому випадку можна одразу записати рівняння динамічного програмування для системи (3) та усереднити їх, минаючи стадію часткового усереднення [10, 11]. Результати збігатимуться з наведеними. Ті ж самі результати будуть отримані, використовуючи метод усереднення в рівняннях принципу максимуму.

Висновки

У розглянутій коливальні системі, як один із видів вібраційних машин, випадкове силове збудження представлено у вигляді «білого шуму», при цьому рух системи описаний стохастичними диференціальними рівняннями. Це дозволило записати рівняння динамічного програмування і побудувати синтез керування. Визначена функція оптимального керування зовнішнього прикладення моменту сил до підвісу (виконавчого органу) з метою стабілізації коливальної системи при випадковому силовому збудженні системи уцілому. Показано, що при любому допустимому керуванню процес зводиться до дифузійного і виконується оптимальний пошук на траєкторіях (режимах) граничної дифузійної системи.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

[1] Іскович–Лотоцький Р. Д. Аналіз використання гідроімпульсних вібророзвантажувальних пристроїв на автомобільному транспорті / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук // *Вісник Вінницького політехнічного інституту*. – 2011, – № 6. – С. 228 – 231.

[2] Іскович–Лотоцький Р. Д. Основи резонансно–структурної теорії віброударного розвантаження транспортних засобів / Р. Д. Іскович–Лотоцький, Я. В. Іванчук, Я. П. Веселовський // *Наука та прогрес транспорту. Вісник Дніпропетровського національного університету залізничного транспорту ім. академіка В. Лазаряна*. – Д., 2014. – № 5(53) – С. 109 – 118. doi: 10.15802/stp2014/30458.

[3] Ковалева А. С. *Управление колебательными и виброударными системами*. – М.: Наука. Гл. ред. Физ. мат. лит., 1990. – 256 с.

[4] Іванчук Я. В. Математичний метод визначення стійкості коливальних систем під дією зовнішнього вібраційного навантаження / Я. В. Іванчук / *Технічні науки та технології : науковий журнал* / Чернігів. нац. техн. ун-т. – Чернігів : ЧНТУ, 2018. – № 2 (12). – с. 25 – 33. doi: 10.25140/2411-5363-2018-2(12)-25-33.

[5] Светлицкий В. А. *Случайные колебания механических систем*. – М.: Машиностроение, 1976. – 462 с.

[6] Hussman U. G. *On the approximation of optimal stochastic control*. J. Optimiz. Th. Appl. 1983. Vol. 40, No. 3. P. 433–450.

[7] Rostislav D. Iskovych-Lototsky, Yaroslav V. Ivanchuk, Natalia R. Veselovska, Wojciech Surtel, Samat Sundetov. "Automatic system for modeling vibro-impact unloading bulk cargo on vehicles", Proc. SPIE 10808, *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018*, 1080860 (1 October 2018). doi: 10.1117/12.2501526.

[8] Ito K. *On stochastic differential equations. Memoirs Amer*. Math. Soc. 1992. Vol. 4. No. 1. P. 234–251.

[9] Rostislav Iskovich-Lototsky, Ivan Kots, Yaroslav Ivanchuk, Yevheniy Ivashko, Konrad Gromaszek, Assel Mussabekova, Mashat Kalimoldayev. "Terms of the stability for the control valve of the hydraulic impulse drive of vibrating and vibro-impact machines // *Przeglad Elektrotechniczny*. – 2019. Vol. 4, no. 19. – P. 19-23. doi: 10.15199/48.2019.04.04.

[10] Розенвассер Е. Н. *Периодические нестационарные системы управления*. – М.: Наука, 1973. – 512 с.

[11] Іванчук Я. В. Математичне моделювання робочих процесів в керуючій апаратурі гідроімпульсного привода / Я. В. Іванчук, Р. Д. Іскович-Лотоцький, І. В. Севостьянов, Н. Р. Веселовська та ін. // *Mechanics and Advanced Technologies*/ Том 5, №2 (2021) – С. 47-56. doi: https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.243661.

REFERENCES

[1] Iskovych–Lototskyi R. D. Analiz vykorystannia hidroimpulsnykh vibrorozvantazhuvalnykh prystroiv na avtomobilnomu transporti / R. D. Iskovych–Lototskyi, Ya. V. Ivanchuk // *Visnyk Vinnytskoho politekhnichnoho instytutu*. – 2011, – № 6. – S. 228 – 231.

[2] Iskovych–Lototskyi R. D. Osnovy rezonansno–strukturnoi teorii vibroudarnoho rozvantazhennia transportnykh zasobiv / R. D. Iskovych–Lototskyi, Ya. V. Ivanchuk, Ya. P. Veselovskyi // *Nauka ta prohres transportu. Visnyk Dnipropetrovskoho natsionalnoho universytetu zaliznychnoho transportu im. akademika V. Lazariana*. – D., 2014. – № 5(53) – S. 109 – 118. doi: 10.15802/stp2014/30458.

[3] Kovaleva A. S. *Upravlenye kolebatelnimy y vybroudarnimy systemamy*. – M.: Nauka. Hl. red. Fyz. mat. lyt., 1990. – 256 s.

[4] Ivanchuk Ya. V. Matematychnyi metod vyznachennia stiikosti kolyvalnykh system pid diieiu zovnishnoho vibratsiinoho navantazhennia / Ya. V. Ivanchuk / *Tekhnichni nauky ta tekhnolohii : naukovyi zhurnal* / Chernihiv. nats. tekhn. un-t. – Chernihiv : ChNTU, 2018. – № 2 (12). – S. 25 – 33. doi: 10.25140/2411-5363-2018-2(12)-25-33.

[5] Svetlytskyi V. A. Sluchainie kolebanyia mekhanycheskykh system. – M.: Mashynostroenye, 1976. – 462 s.

[6] Hussman U. G. *On the approximation of optimal stochastic control*. J. Optimiz. Th. Appl. 1983. Vol. 40, No. 3. P. 433–450.

[7] Rostislav D. Iskovych-Lototsky, Yaroslav V. Ivanchuk, Natalia R. Veselovska, Wojciech Surtel, Samat Sundetov. "Automatic system for modeling vibro-impact unloading bulk cargo on vehicles", Proc. SPIE 10808, *Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High-Energy Physics Experiments 2018*, 1080860 (1 October 2018). doi: 10.1117/12.2501526.

[8] Ito K. *On stochastic differential equations. Memoirs Amer*. Math. Soc. 1992. Vol. 4. No. 1. P. 234–251.

[9] Rostislav Iskovich-Lototsky, Ivan Kots, Yaroslav Ivanchuk, Yevheniy Ivashko, Konrad Gromaszek, Assel Mussabekova, Mashat Kalimoldayev. "Terms of the stability for the control valve of the hydraulic impulse drive of vibrating and vibro-impact machines // *Przeglad Elektrotechniczny*. – 2019. Vol. 4, no. 19. – P. 19-23. doi: 10.15199/48.2019.04.04.

[10] Rozenvasser E. N. *Peryodycheskye nestatsyonarnie systemi upravlenyia*. – M.: Nauka, 1973. – 512 s.

[11] Ivanchuk Ya. V. Matematychne modeliuvannia robochykh protsesiv v keruiuchii aparaturi hidroimpulsnoho pryvoda / Ya. V. Ivanchuk, R. D. Iskovych-Lototskyi, I. V. Sevostianov, N. R. Veselovska ta in. // *Mechanics and Advanced Technologies*/ Tom 5, №2 (2021) – S. 47-56. doi: https://doi.org/10.20535/2521-1943.2021.5.2.243661.

Іванчук Ярослав Володимирович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри комп’ютерних наук, e-mail: ivanchuck@ukr.net; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4775-6505.

Іскович-Лотоцький Ростислав Дмитрович — д-р техн. наук, проф., професор кафедри галузевого машинобудування, e-mail: islord@vntu.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3920-3019.

Замковий Олександр Дмитрович — аспірант кафедри комп’ютерних наук, e-mail: 2knzamkovyi@gmail.com.

Павлович Роман Ігорович — аспірант кафедри комп’ютерних наук, e-mail: pavlovich.roma97@gmail.com.
Вінницький національний технічний університет

Y. V. Ivanchuk[1]
R. D. Iskovych-Lototsky[1]
O. D. Zamkovyi[1]
R. I. Pavlovych[1]

Simulation of the Optimal Control of the Established Motion of the Oscillatory System in Random Excitation

[1]Vinnytsia National Technical University

An approach to modeling the motion dynamics of an oscillatory system with external random excitation is proposed. This made it possible to determine the optimal control modes for the established movement of the system. In the oscillatory system under consideration, as an example of one of the types of vibration machine, random periodic force excitation is presented in the form of "white noise". Also, the motion of the system is described by stochastic differential equations. The periodic component of the excitation is represented as an expansion in terms of cosines. It is accepted that random and deterministic excitations have the same effect on the motion of the system. It is determined that in oscillatory systems excited by white noise, the value of the drift coefficients in the functional is formed only by averaging the deterministic components. This made it possible to write down the averaged dynamic programming equation and build a control synthesis. The used principle of dynamic programming determined the synthesis of control and the stochastic principle of maximum. This made it possible to build program management. The function of optimal control of the external application of the moment of forces to the suspension (executive body) is determined. This is necessary to stabilize the oscillatory system in case of random force excitation of the system as a whole. Based on the optimal control equation, special cases are considered, namely: parametric excitation includes only the first harmonic, and there is no parametric resonance; external force excitation does not contain the first harmonic, there is no external resonance; there are no external force random excitations. It is shown that for any admissible control with the help of the torque applied to the suspension, the process is reduced to diffusion. An optimal search is also performed on the trajectories (modes) of the limiting diffusion system.

Keywords: vibration system, pendulum, oscillations, modeling, optimal control, random excitation, white noise, torque.

Ivanchuk Yaroslav V. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Depatment for Computer Science, e-mail: ivanchuck@ukr.net; ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4775-6505.

Iskovych-Lototsky Rostislav D. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Department for Industrial Engineering, e-mail: islord@vntu.edu.ua; ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3920-3019.

Zamkovyi Oleksandr D. — PhD student of the Depatment for Computer Science, e-mail: 2knzamkovyi@gmail.com.

Pavlovych Roman I. — PhD student of the Depatment for Computer Science, e-mail: pavlovich.roma97@gmail.com

Vinnytsia National Technical University