

В. Я. Гальченко¹
Р. В. Трембовецька¹
В. В. Тичков¹
Н. Б. Тичкова¹

СТВОРЕННЯ СЕМИ- ТА ВОСЬМИ-ФАКТОРНИХ ОДНОРІДНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ ПЛАНІВ ЕКСПЕРИМЕНТУ З НИЗЬКИМИ РОЗБІЖНОСТЯМИ

¹Черкаський державний технологічний університет

Наукові дослідження щодо побудови ефективних комп'ютерних однорідних планів експериментів ведуться доволі активно і наразі доведено, що найкращі результати досягаються за допомогою квазіпослідовностей Соболя, але це спостерігається не у всіх випадках довільного їх поєднання. Тому побудова однорідних планів, навіть для невеликої кількості факторів, вимагає додаткових досліджень щодо забезпечення прийнятних показників їх гомогенності. Робота присвячена питанням створення багатофакторних однорідних комп'ютерних планів експериментів на основі квазівипадкових послідовностей Соболя з низькими показниками розбіжностей. Об'єктом досліджень є процес створення комп'ютерних однорідних планів експериментів. Мета роботи полягає в створенні багатофакторних, а саме семи- та восьми-факторних однорідних планів експериментів з низькими показниками центрованої та циклічної розбіжностей, а також дослідження їх проєкційних властивостей для різної кількості точок заповнення одиничного гіперкубу. З метою каталогізації створено семи- та восьми-факторні комп'ютерні однорідні плани експериментів, оцінка якості яких здійснена одночасно візуальним аналізом матриці розсіювання всіх двовимірних проєкцій та кількісними показниками неоднорідності сукупності векторів, які утворюють план в гіперпросторі, а саме центрованою та циклічною розбіжностями. Підтверджена тенденція щодо збереження низьких показників цих характеристик в багатофакторних просторах, яка спостерігається зі зміною кількості точок плану. Результати дослідження можуть бути використані при побудові метамodelей процесів вимірювань для випадків, коли необхідно забезпечити високий ступінь точності апроксимації складної за формою гіперповерхні відгуку, розв'язку обернених задач в реальному масштабі часу.

Ключові слова: комп'ютерний план експерименту, однорідний дизайн, квазіпослідовність Соболя, показники розбіжності плану, проєкційні властивості

Вступ

Наукові дослідження щодо побудови ефективних однорідних планів експериментів (ОПЕ), реалізація яких забезпечує заповнення простору пошуку точками, що рівномірно розподілені у всій області досліджень, ведуться активно і наразі доведено, що найкращі результати досягаються за допомогою квазіпослідовностей Соболя (КПС) [1,2].

В роботах [3,4] автори запропонували створити ефективні багатовимірні ОПЕ з гарантовано прийнятними низькими розбіжностями, використовуючи рекурсивні R_d -послідовності, які не вимагають додаткових досліджень пошуку вдалих комбінацій наборів векторів, розподілених в одиничному гіперпросторі. Проведений порівняльний аналіз ОПЕ на рекурсивних R_d -послідовностях та на КПС з графічною візуалізацією на основі діаграм Вороного і застосуванням індикаторів центрованої (CD) та циклічної (WD) розбіжностей та зроблено висновок, що використання комбінацій КПС все ж показує найкращі результати завдяки вдалому вибору напрямних чисел. У разі збільшення розмірності простору R_d -концепція побудови планів передбачає автоматичне створення нових їх варіантів із цілком прийнятними, але не найкращими характеристиками однорідності, шляхом формування нових векторів без додаткових досліджень гомогенності. Проте автори обмежилися лише п'яти-вимірними ОПЕ і для більшої розмірності факторного простору дослідження не здійснювалися.

Тому актуальною є задача створення семи- та восьми-факторних однорідних комп'ютерних

планів експерименту з низькими розбіжностями з використанням КПС.

Мета статті полягає в створенні багатofакторних, а саме семи- та восьми-факторних однорідних планів експериментів з низькими показниками центрованої та циклічної розбіжностей, а також дослідження їх проєкційних властивостей для різної кількості точок заповнення одиничного гіперкубу.

Постановка задачі

В цьому дослідженні як векторні складові планів використано КПС з низькими розбіжностями. Для створення багатовимірних ОПЕ на КПС застосовано алгоритм побудови, запропонований авторами в роботі [3], та результати щодо отриманих найкращих двовимірних ОПЕ. Необхідно побудувати семи- та восьми-вимірні ОПЕ на основі КПС з використанням їх найкращих комбінацій, оцінити їх за показниками однорідності та порівняти з ОПЕ на рекурсивних R_d -послідовностях. Оцінювання досконалості комп'ютерних ОПЕ здійснюється за кількісними характеристиками відхилення згенерованого розподілу від ідеального рівномірного за низкою показників розбіжності, а саме центрованою та циклічною.

Результати дослідження

Для побудови багатofакторних ОПЕ застосовано метод рівномірного заповнення одиничного гіперкубу опорними точками, який має найкращі характеристики однорідності та який реалізовано на основі КПС. Використовуючи математичні вирази для генерації КПС в багатовимірному факторному просторі [2], знайдено найкращі комбінації цих послідовностей для семи та восьми факторів за показниками CD та WD розбіжностей. Отримані показники якості створених багатовимірних ОПЕ на основі КПС для різної кількості точок зведені в таблицях 1 та 2. Для порівняння в таблиці 3 наведено ці ж показники для рекурсивних R_7 - та R_8 -послідовностей, які побудовано за методикою викладеною в роботі [4].

Таблиця 1

Показники розбіжностей для семи-факторних ОПЕ для кращих варіантів комбінацій КПС

Комбінація ЛП ₇ -послідовностей	Кількість точок ОПЕ	$CD(Dn)^2 \times 10^{-3}$	$WD(P)^2$
$(\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_7, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{20})$	N = 31	28,094	15,08896
	N = 127	6,723914	15,006366
	N = 511	0,4761187	14,984934
	N = 1023	0,182865	14,983879
$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_6, \xi_7, \xi_{12}, \xi_{14})$	N = 31	30,46	15,100734
	N = 127	3,235596	14,995353
	N = 511	0,5089479	14,984971
	N = 1023	0,2386919	14,983965

Таблиця 2

Показники розбіжностей для восьми-факторних ОПЕ для кращих варіантів комбінацій КПС

Комбінація ЛП ₈ -послідовностей	Кількість точок ОПЕ	$CD(Dn)^2 \times 10^{-3}$	$WD(P)^2$
$(\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_7, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{19}, \xi_{20})$	N = 31	52,924	20,184114
	N = 127	9,349894	20,017592
	N = 511	0,8750245	19,981375
	N = 1023	0,331925	19,979154
$(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7, \xi_{18})$	N = 31	43,684	20,178014
	N = 127	5,996031	20,001731
	N = 511	1,002773	19,981424
	N = 1023	0,251903	19,978672

Чисельні значення однієї із найкращих комбінацій КПС, а саме $(\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_7, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{19}, \xi_{20})$ для N=1023 точок представлено таблиці 4.

Таблиця 3

Показники розбіжностей для ОПЕ на основі R_d-послідовностей

Рекурсивні R _d -послідовності	Кількість точок ОПЕ	$CD(Dn)^2 \times 10^{-3}$	$WD(P)^2$
R ₇	N = 31	41,412	15,095199
	N = 127	5,684306	14,998476
	N = 511	1,048032	14,98591
	N = 1023	0,5584062	14,984545
R ₈	N = 31	76,259	20,261907
	N = 127	12,633	20,024373
	N = 511	2,633204	19,986838
	N = 1023	0,8386838	19,980059

Таблиця 4

Згенеровані LP_r-послідовності в одиничному гіперкубі для восьми-факторного ОПЕ для кількості точок 1023

	ξ_1	ξ_2	ξ_4	ξ_7	ξ_{11}	ξ_{12}	ξ_{19}	ξ_{20}
1	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
2	0,25	0,75	0,75	0,25	0,25	0,75	0,25	0,75
3	0,75	0,25	0,25	0,75	0,75	0,25	0,75	0,25
4	0,125	0,625	0,875	0,625	0,375	0,875	0,125	0,125
...
28	0,21875	0,84375	0,53125	0,78125	0,90625	0,21875	0,46875	0,34375
29	0,71875	0,34375	0,03125	0,28125	0,40625	0,71875	0,96875	0,84375
30	0,46875	0,09375	0,28125	0,53125	0,65625	0,96875	0,21875	0,59375
31	0,96875	0,59375	0,78125	0,03125	0,15625	0,46875	0,71875	0,09375
...
60	0,234375	0,078125	0,140625	0,515625	0,328125	0,953125	0,890625	0,640625
61	0,734375	0,578125	0,640625	0,015625	0,828125	0,453125	0,390625	0,140625
62	0,484375	0,828125	0,890625	0,765625	0,078125	0,203125	0,640625	0,390625
63	0,984375	0,328125	0,390625	0,265625	0,578125	0,703125	0,140625	0,890625
...
124	0,242188	0,742188	0,273438	0,398438	0,554688	0,664063	0,820313	0,742188
125	0,742188	0,242188	0,773438	0,898438	0,054688	0,164063	0,320313	0,242188
126	0,492188	0,492188	0,523438	0,148438	0,804688	0,414063	0,570313	0,492188
127	0,992188	0,992188	0,023438	0,648438	0,304688	0,914063	0,070313	0,992188
...
252	0,246094	0,253906	0,832031	0,082031	0,136719	0,792969	0,097656	0,996094
253	0,746094	0,753906	0,332031	0,582031	0,636719	0,292969	0,597656	0,496094
254	0,496094	0,503906	0,082031	0,332031	0,386719	0,042969	0,347656	0,246094
255	0,996094	0,00390625	0,582031	0,832031	0,886719	0,542969	0,847656	0,746094
...
508	0,248047	0,755859	0,056641	0,845703	0,474609	0,748047	0,955078	0,119141
509	0,748047	0,255859	0,556641	0,345703	0,974609	0,248047	0,455078	0,619141
510	0,498047	0,005859375	0,806641	0,595703	0,224609	0,498047	0,705078	0,869141
511	0,998047	0,505859	0,306641	0,095703	0,724609	0,998047	0,205078	0,369141
...
1020	0,249023	0,004882813	0,952148	0,999023	0,581055	0,711914	0,541992	0,807617
1021	0,749023	0,504883	0,452148	0,499023	0,081055	0,211914	0,041992	0,307617
1022	0,499023	0,754883	0,202148	0,749023	0,831055	0,461914	0,791992	0,057617
1023	0,999023	0,254883	0,702148	0,249023	0,331055	0,961914	0,291992	0,557617

Проте для створених ОПЕ візуальна оцінка їх однорідності в гіперпросторі є нереальною. Тому для більшої наочності згенерованих послідовностей використано графічне їх зображення у вигляді парних

проекцій. На рисунку 1 представлені деякі попарні проєкції для комбінації КПС $(\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_7, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{19}, \xi_{20})$ восьми-факторного плану.

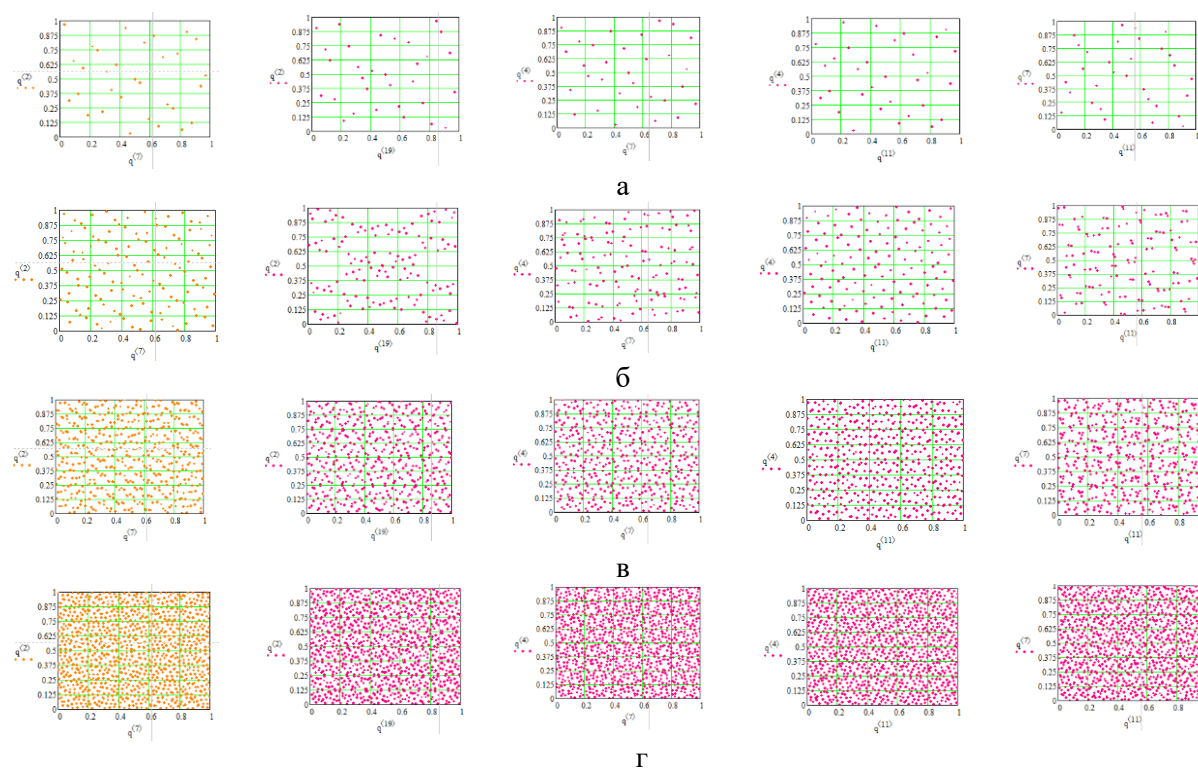


Рис. 1. Деякі попарні проєкції КПС $(\xi_1, \xi_2, \xi_4, \xi_7, \xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{19}, \xi_{20})$ для восьми-вимірного плану експерименту при:
а - $N = 31$, б - $N = 127$, в - $N = 511$ та г - $N = 1023$

Висновки

Для каталогізації побудовано семи- та восьми-вимірні однорідні плани комп'ютерних експериментів на основі квазіпослідовностей Соболя. Відібрані найкращі послідовності Соболя, для яких розраховані кількісні показники неоднорідності - центровані та циклічні розбіжності при різних кількостях точок заповнення гіперпростору. Проведено порівняльний аналіз ОПЕ на основі квазіпослідовностей Соболя та рекурсивних R_d -послідовностей та виявлено що, навіть при малій кількості точок вдало підібрані ОПЕ на основі квазіпослідовностей Соболя мають кращий результат у порівнянні з ОПЕ на рекурсивних R_d -послідовностях. Проведено візуальний аналіз попарних проєкцій для багатовимірних ОПЕ з кращих комбінацій квазіпослідовностей Соболя. Дослідження проводилися при різних кількостях точок заповнення гіперпростору.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

- [1] P. Praks, and D. Brkić. «Approximate flow friction factor: Estimation of the accuracy using Sobol's quasi-random sampling». *Axioms*. 11(2), pp. 36. 2022. <https://doi.org/10.3390/axioms11020036>
- [2] I. M. Sobol', D. Asotsky, A. Kreinin, S., and Kucherenko. «Construction and comparison of high-dimensional Sobol's generators». *Wilmott*. 56, pp. 4-79. 2011. <https://doi.org/10.1002/wilm.10056>
- [3] V. Ya. Halchenko, R. V. Trembovetska, V. V. Tychkov, and A. V. Storchak. «The construction of effective multidimensional computer designs of experiments based on a quasi-random additive recursive R_d -sequence». *Applied Computer Systems*. 25(1), pp. 70-76. 2020. <https://doi.org/10.2478/acss-2020-0009>
- [4] В. Я. Гальченко, М. Д. Кошовий, і Р. В. Трємбовецька. «Однорідні плани багатовимірних експериментів на квазиперіодичних R -послідовностях Робертса для сурогатного моделювання у вихрострумовій структуроскопії». *Радіоелектроніка, Інформатика, Управління*. 62(3), pp. 22-30. 2022. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2022-3-2>

REFERENCES

- [1] P. Praks, and D. Brkić. «Approximate flow friction factor: Estimation of the accuracy using Sobol's quasi-random sampling». *Axioms*. 11(2), pp. 36. 2022. <https://doi.org/10.3390/axioms11020036>
- [2] I. M. Sobol', D. Asotsky, A. Kreinin, S., and Kucherenko. «Construction and comparison of high-dimensional Sobol's generators». *Wilmott*. 56, pp. 4-79. 2011. <https://doi.org/10.1002/wilm.10056>

[3] V. Ya. Halchenko, R. V. Trembovetska, V. V. Tychkov, and A. V. Storchak. «The construction of effective multidimensional computer designs of experiments based on a quasi-random additive recursive Rd–sequence». *Applied Computer Systems*. 25(1), pp. 70–76. 2020. <https://doi.org/10.2478/acss-2020-0009>

[4] V. Ya. Galchenko, N. D. Koshevoy, and R. V. Trembovetskaya. «Homogeneous plans of multi-factory experiments on quasi-random R-Roberts sequences for surrogate modeling in a vortex style structuroscopy». *Radio Electronics, Computer Science, Control*. 62(3), pp. 22–30. 2022. <https://doi.org/10.15588/1607-3274-2022-3-2>

Гальченко Володимир Якович — д-р техн. наук, професор, професор кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій, e-mail: halchvl@gmail.com ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0304-372X>

Трембовецька Руслана Володимирівна — д-р техн. наук, доц., доцент кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій, e-mail: r.trembovetska@chdtu.edu.ua ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2308-6690>

Тичков Володимир Володимирович — канд. техн. наук, доц., доцент кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій, email: v.tychkov@chdtu.edu.ua ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9997-307X>

Тичкова Наталія Борисівна — аспірантка кафедри приладобудування, мехатроніки та комп'ютеризованих технологій, e-mail: n.b.tychkova.asp21@chdtu.edu.ua .

Черкаський державний технологічний університет

V. Ya. Halchenko¹
R. V. Trembovetska¹
V. V. Tychkov¹
N. B. Tychkova¹

CREATION of SEVEN- and EIGHT-FACTORY UNIFORM COMPUTER DESIGNS of EXPERIMENT with LOW DISCREPANCIES

¹Cherkasy State Technological University

Scientific research on the construction of efficient uniform computer designs of experiments is being carried out quite actively, and so far it has been proven that, the best results are achieved using Sobol's quasi-sequences, but this is not observed in all cases of their arbitrary combination. Therefore, the construction of uniform designs even for a small number of factors requires additional research to ensure acceptable indicators of their uniformity. The work is devoted to the creation of multifactorial uniform computer designs of experiments based on quasi-random Sobol's sequences with low discrepancy rates. The object of research is the process of creating uniform computer designs of experiments. The purpose of the work is to create multifactorial, namely seven- and eight-factor uniform designs of experiments with low rates of centered and wrap-around discrepancies, as well as to study their projection properties for a different number of filling points of a single hypercube. For the purpose of cataloging, seven- and eight-factor uniform computer designs of experiments were created, the quality of which was assessed simultaneously by a visual analysis of the scattering matrix of all two-dimensional projections and quantitative indicators of the uniformity of the set of vectors that form the design in hyperspace, namely, centered and wrap-around discrepancies. The trend of maintaining low indicators of these characteristics in multifactorial spaces, which is observed with a change in the number of design points, is confirmed. The results of the study can be used in the construction of metamodels of measurement processes for cases where it is necessary to ensure a high degree of accuracy in approximating a response hypersurface of a complex shape, solving inverse problems in real time.

Keywords: computer design of the experiment, uniform design, Sobol's quasi-sequence, indicators of design discrepancy, projection properties.

Halchenko Volodymyr Ya. — Dr. Sc. (Eng.), Professor, Professor of the Department of Instrumentation, Mechatronics and Computerized Technologies, e-mail: halchvl@gmail.com ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0304-372X>

Trembovetska Ruslana V. — Dr. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Instrumentation, Mechatronics and Computerized Technologies, e-mail: r.trembovetska@chdtu.edu.ua ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2308-6690>

Tychkov Volodymyr V. — Cand. Sc. (Eng.), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Instrumentation, Mechatronics and Computerized Technologies, email: v.tychkov@chdtu.edu.ua ; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9997-307X>

Tychkova Natalia B. — PhD Student (Eng.) of the Department of Instrumentation, Mechatronics and Computerized Technologies, e-mail: n.b.tychkova.asp21@chdtu.edu.ua .